黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 7 hours ago
mathtod.online/@dgakane/253094

サイコロの目 X について、期待値 $E[X^2]$ はこういうこと。

「サイコロをふって下さい。そして出た目の二乗万円をあなたは私に支払います。あなたが支払う金額の期待値は幾らでしょうか？」

「$E[X^2]$ 万円です」

「それではサイコロをふって下さい」

「いやです」

😎 😎 😎 😎

各々の確率変数についてその期待値や分散は重要な量なのですが、それとは違う系列にモーメント $E[X^k]$ があります。

$V[X]=E[X^2]-E[X]^2$ は分散を1次と2次のモーメントで表わす公式です。

モーメントの他にも $E[\log X]$ の様な量が重要な役目を果たすこともあります。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 7 hours ago
確率変数 X が従う確率分布がそのモーメントたち

$$E[X], E[X^2], E[X^3], \ldots$$

からどのようにどれだけ決まるか？

という問題はモーメント問題と呼ばれています。

決まらない簡単な反例があるのですが(例えば対数正規分布はモーメントたちから一意的に決まらない)、$E[|X|^k]$ の増大度に適当な制限を付ければ、モーメントたちからもとの確率分布が一意的に決定されることを示せます。

たとえば

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X^{2n}]\frac{z^2}{(2n)!}$$

の収束半径が 0 より大きいならば、モーメントたちからもとの確率分布が一意的に決定されます。

私による雑な解説は
genkuroki.github.io/documents/...
の注意10.12(86-87頁)にあります。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 7 hours ago
というわけで、(実用的に使いやすいある制限のもとで)モーメントたちは確率分布の情報をすべて持っていると思えます。

こういう発想をできれば、確率分布について考えるときの武器として、平均と分散だけではなく、モーメントたちが心の中に追加されることになるわけです。

そして、確率分布に関係する量はおおむねモーメントたちで書けると思って構いません。

実際には、モーメントたちをたばねた母函数を考えます。複素数 z の函数

$$\phi(z)=E[e^{zX}]$$

を考えます。$z \in \mathbb{R}$ への制限はモーメント母函数と呼ばれ、$z \in i\mathbb{R}$ への制限は特性函数と呼ばれています。(呼び方はどうでもよい。)

z について $\phi(z)$ がテイラー・マクローリン展開できればこの函数からすべてのモーメントたちが得られます。このようなものをよく「母函数」(generating function)と呼びます。

母函数による様々な重要な量の表現能力は極めて強力です。

この点についてはかなりすすんだ勉強をしないとわからない。

黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

私は統計力学が好きなので、モーメント母函数を

$$Z(\beta) = E[e^{-\beta X}], \quad \beta = \frac{1}{T}$$

と書いて、T を絶対温度、β を逆温度と呼んでいます。そして、$Z(\beta)$ はモーメント母函数ではなく、分配函数(partition function)と呼ぶ。

ここは確率論や統計学における標準的用語法と違うのですが、私はそのような用語法に従う気はまったくないわけです。

確率論や統計学では $\log E[e^{tX}]$ をキュムラント母函数と呼ぶことが多いのですが、私は

$$\Psi(\beta) = \log Z(\beta),$$
$$F(\beta) = -\beta^{-1} \log Z(\beta)$$

をそれぞれマシュー函数、自由エネルギーと呼んでいます。

$Z(\beta)$ はサンプル数を大きくする極限で「激しく指数函数的」に振る舞うので、その対数の方が色々扱い易い。

genkuroki.github.io/documents/…

2017年06月11日 13:37 · Web · 0 · 1 · Webで開く